(٣) المعادلات التفاضلية التامة من الرتبة الاولى والدرجة الاولى

Exact Differential Equations of First Order and First Degree

لتكن المعادلة التفاضلية :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = o \qquad (1)$$

فالشرط اللازم والكافي لتكون هذه المعادلة تامة هو:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

طريقة الحل:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

1- نثبت ان $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

2- حل المعادلة التامة سيكون بالصيغة:

$$\int M\,dx + \int n\,dy = 0$$

حيث ان n هي جزء من الدالة N بحيث انه لايحتوي على المتغير x. او نستخدم الصيغة الاخرى:

$$\int N\,dy + \int m\,dx = 0$$

حيث ان m هي جزء من الدالة M بحيث انه لايحتوي على المتغير y .

Example Solve the differential equation:

$$(ye^x + 2x\cos y)dx + (e^x - \cos y - x^2 \sin y)dy = 0$$

Solution:

$$M = ye^x + 2x\cos y \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = e^x - 2x\sin y$$

$$N = e^x - \cos y - x^2 \sin y \rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = e^x - 2x\sin y$$

$$\rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

The differential equation is exact and the general solution is:

$$\int M\,dx + \int n\,dy = 0$$

$$\rightarrow \int (ye^x + 2x\cos y)\,dx + \int -\cos y\,dy = 0$$

$$\boxed{\therefore\ ye^x + x^2\cos y - \sin y + c = 0}$$

Example Solve the differential equation:

$$(e^{y} + x\sin xy)\frac{dy}{dx} + y\sin xy = 0$$

Solution: $y\sin xy\, dx + (e^{y} + x\sin xy)dy = 0$

$$M = y\sin xy \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = y\cos xy\,.x + \sin xy$$

$$= xy\cos xy + \sin xy$$

$$N = e^{y} + x\sin xy \rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = x\cos xy\,.y + \sin xy$$

$$= xy\cos xy + \sin xy$$

$\rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, The differential equation is exact and its solution is:

$$\int M\, dx + \int n\, dy = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{-\cos xy + e^{y} + c = 0}$$

H.w:

- $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$
- $(4x^3y^2 - 2xy)dx + (2x^4y - x^2)dy = 0$
- $(3e^{3x}y - 2x)dx + e^{3x}dy = 0$

المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الأولي

Linear First Order Differential Equations

المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الأولي

Linear First - Order Differential Equations

IV.1. المعادلة التفاضلية الخطية — Linear Differential Equation

سبق أن عرفنا المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة n ويهمنا هنا المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى والتي تكتب على الصورة :-

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (1)$$

حيث $P(x)$، $Q(x)$ دالتان في المتغير x فقط .

طريقة الحل:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Integrating Factor: $e^{\int P(x)dx}$

فان حل المعادلة الخطية سيكون بالصيغة:

$$ye^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx}.Q(x)\,dx + c$$

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx}.Q(x)\,dx + c\right]}$$

وفي حالة كون المتغير x هو المعتمد والمتغير y هو المستقل اي تكتب العادلة بالشكل:

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$$

فان حل المعادلة الخطية سيكون بالصيغة:

$$x = e^{-\int P(y)dy}\left[\int e^{\int P(y)dy} . Q(y)\, dy + c\right]$$

<u>Example</u> Solve the differential equation:

$$xy' - 2y - x^3e^x = 0$$

<u>Solution</u>:

$$y' - \frac{2}{x}y - x^2e^x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^2e^x \, , P(x) = -\frac{2}{x} \, , Q(x) = x^2e^x$$

Integrating Factor: $e^{\int P(x)dx}$

$$e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\int\frac{dx}{x}} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

Integrating Factor: $e^{\int P(x)dx}$

$$e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\int \frac{dx}{x}} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$ye^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx}.Q(x) + c$$

$$\frac{y}{x^2} = \int \frac{1}{x^2}.(x^2e^x)dx \ + c$$

$$\frac{y}{x^2} = \int e^x dx \ + c$$

$$\frac{y}{x^2} = e^x + c \rightarrow \ \ y = x^2e^x + cx^2$$

Example Solve the differential equation:

$$x\frac{dy}{dx} - ay = x + 1$$

***Solution*:**

$$\frac{dy}{dx} - \frac{a}{x}y = \frac{x+1}{x}$$

$$P(x) = -\frac{a}{x}, Q(x) = \frac{x+1}{x}$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int -\frac{a}{x}dx} = e^{-a\int\frac{dx}{x}} = e^{-a\ln x} = e^{\ln x^{-a}} = x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

$$ye^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx}.Q(x) + c$$

$$\frac{y}{x^a} = \int \frac{1}{x^a} . \left(\frac{x+1}{x}\right) dx \ + c$$

$$\frac{y}{x^a} = \int \frac{x+1}{x^{a+1}} dx \ + c$$

$$y = x^a\left[\int (x+1) . x^{-a-1} dx \ + c\right]$$

$$= x^a\left[\int (x^{-a} + x^{-a-1}) dx \ + c\right]$$

$$= x^a\left[\frac{x^{-a+1}}{-a+1} - \frac{x^{-a}}{a} + c\right]$$

$$= \frac{x}{-a+1} - \frac{1}{a} + cx^a$$

H.w.

- $(x+1)\frac{dy}{dx} - ny = e^x (x+1)^{n+1}$
- $(x^2+1)\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x^2$