(٢) المعادلات المتجانسة من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

:(Homogenous Equations of First Order and First Degree)

تعريف: يقال للدالة $f(x,y)$ بأنها متجانسة من الدرجة n إذا حققت الشرط الآتي:

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y) \qquad (t > 0)$$

$$or \quad f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

أمثلة: بيِّن فيما إذا كانت الدوال الآتية متجانسة، ثم جد درجة كل منهما:

$$(1) \quad f(x,y) = 7x^2 + 8xy - gy^2$$

الحل:

$$f(tx,ty) = 7(tx)^2 + 8(tx)(ty) - g(ty)^2 = 7t^2x^2 + 8t^2xy - gt^2y^2$$

$$= t^2(7x^2 + 8xy - gy^2)$$

$$= t^2 f(x,y)$$

∴ الدالة $f(x,y)$ متجانسة ومن الدرجة ٢.

(2) $f(x,y) = x^3 - 2y^3 + 5y^2x$

الحل:

$$f(tx,ty) = (tx)^3 - 2(ty)^3 + 5(ty)^2(tx) = t^3x^3 - 2t^3y^3 + 5t^3y^2x$$
$$= t^3(x^3 - 2y^3 + 5y^2x)$$
$$= t^3 f(x,y)$$

$\therefore$ الدالة $f(x,y)$ متجانسة ومن الدرجة ٣.

(3) $f(x,y) = gx^2 - xy + 2x$

الحل:

$$f(tx,ty) = g(tx)^2 - (tx)(ty) + 2(tx) = gt^2x^2 - t^2xy + 2tx$$

$\therefore$ الدالة ليست متجانسة.

تعريـــف: المعادلــة التفاضــلية $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ يقــال أنهــا متجانسة، إذا كانت كل من M و N دالة متجانسة ومتساوية بالدرجة.

مثال: $(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0$

$N(x,y)$ متجانسة من الدرجة ٢. $M(x,y)$ متجانسة من الدرجة ٢.

∴ المعادلة هي معادلة تفاضلية متجانسة.

حل المعادلات التفاضلية المتجانسة:

الحل يتم بالتعويض الآتي:

$$y = vx$$
$$dy = vdx + xdv$$

فتتحول المعادلة التفاضلية المتجانسة إلى معادلة تفاضلية تنفصل متغيراتها يمكن إيجاد حلها بسهولة، وكما هو موضّح في الأمثلة الآتية:

أمثلة:

$$(1)\quad (x^2 - xy + y^2)dx - xy\,dy = 0$$

الحل: المعادلة التفاضلية متجانسة تحل بفرض:

$$y = vx \Rightarrow dy = vdx + xdv$$

بالتعويض في المعادلة ينتج أن:

$$(x^2 - x(vx) + (vx)^2)dx - x(vx)(vdx + xdv) = 0$$
$$\Rightarrow (x^2 - x^2v + v^2x^2)dx - x^2v(vdx + xdv) = 0$$
$$\Rightarrow (x^2 - x^2v + v^2x^2 - x^2v^2)dx - x^3vdv = 0$$
$$\Rightarrow x^2(1 - v)dx - x^3vdv = 0$$

يتم فصل المتغيرات بقسمة الطرفين على $x^3(1-v)$

$$\therefore \frac{dx}{x}-\frac{v}{1-v}dv=0 \Rightarrow \int\frac{dx}{x}+\int\frac{v}{v-1}dv=\int 0$$

$$\Rightarrow \ln x+\int\frac{(v-1)+1}{v-1}dv=C \Rightarrow \ln x+\int dv+\int\frac{dv}{v-1}=C$$

$$\Rightarrow \ln x+v+\ln|v-1|=C \Rightarrow \ln x+\frac{y}{x}+\ln\left|\frac{y}{x}-1\right|=C$$

(2) $\quad xdy-\left(y+\sqrt{x^2-y^2}\right)dx=0$

$\therefore$ المعادلة التفاضلية متجانسة ومن الدرجة الأولى تحل بفرض:

$$y=vx \Rightarrow dy=vdx+xdv$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية ينتج أن:

$$x(vdx + xdv) - \left(vx + \sqrt{x^2 - v^2x^2}\right)dx = 0$$

$$\Rightarrow xvdx + x^2dv - \left(vx + \sqrt{x^2(1 - v^2)}\right)dx = 0$$

$$\Rightarrow xvdx + x^2dv - \left(vx + x\sqrt{(1 - v^2)}\right)dx = 0$$

$$\Rightarrow xvdx + x^2dv - vxdx - x\sqrt{1 - v^2}dx = 0$$

$$\Rightarrow x^2dv - x\sqrt{1 - v^2}dx = 0 \Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} - \frac{dx}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} - \int \frac{dx}{x} = C \Rightarrow \sin^{-1} v - \ln|x| = C$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}(\frac{y}{x}) - \ln|x| = C$$

H.W:

(1) $(xy - y^2)dx - x^2dy = 0$

(2) $(2xy + y^2)dx - 2x^2dy = 0$

(3) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$

Example 1 Show that the DE $y'' - 25y = 0$ has the solution

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-5x}$$

For all real numbers c_1 and c_2.

Solution

Differentiating y twice with respect to x, we get:

$$y' = 5c_1 e^{5x} - 5c_2 e^{-5x}$$

$$y'' = 25c_1 e^{5x} + 25c_2 e^{-5x}$$

Substituting y and y'' in the DE $y'' - 25y = 0$, gives:

$$25c_1 e^{5x} + 25c_2 e^{-5x} - 25\left(c_1 e^{5x} + c_2 e^{-5x}\right) = 0$$

$$25c_1 e^{5x} + 25c_2 e^{-5x} - 25c_1 e^{5x} + 25c_2 e^{-5x} = 0$$

$$0 = 0$$

$$\therefore \underbrace{y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-5x}}_{\text{General Solution}} \text{ is a solution of } y'' - 25y = 0$$

Example 2 Find the value of c which makes $y = e^{cx}$ a solution of DE:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

Solution

Differentiating y twice with respect to x, we get:

$$y' = ce^{cx} \text{ and } y'' = c^2 e^{cx}$$

Substituting y, y' and y'' in the DE $y'' + 5y' + 6y = 0$, gives:

$c^2e^{cx} + 5ce^{cx} + 6e^{cx} = 0$

$e^{cx}(c^2 + 5c + 6) = 0 \rightarrow e^{cx} \neq 0$

$c^2 + 5c + 6 = 0$

$\rightarrow (c + 2)(c + 3) = 0$

Either $c = -2 \rightarrow y = e^{-2x} \rightarrow 4e^{-2x} - 10e^{-2x} + 6e^{-2x} = 0$ ✓

Or $c = -3 \rightarrow y = e^{-3x} \rightarrow 9e^{-3x} - 15e^{-3x} + 6e^{-3x} = 0$ ✓

Both -2 and -3 makes $y = e^{cx}$ a solution of $y'' + 5y' + 6y = 0$

Example 3 Verify that $y = Ae^{-x} + Be^{-2x}$ is a solution of the DE:

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

Solution

Differentiating y twice with respect to x, we get:

$y' = -Ae^{-x} - 2Be^{-2x}$

$y'' = Ae^{-x} + 4Be^{-2x}$

Substituting y, y' and y'' in the DE $y'' + 3y' + 2y = 0$, gives:

$Ae^{-x} + 4Be^{-2x} + 3(-Ae^{-x} - 2Be^{-2x}) + 2(Ae^{-x} + Be^{-2x}) = 0$

$Ae^{-x} + 4Be^{-2x} - 3Ae^{-x} - 6Be^{-2x} + 2Ae^{-x} + 2Be^{-2x} = 0$

$3Ae^{-x} - 3Ae^{-x} + 6Be^{-2x} - 6Be^{-2x} = 0$

$$0 = 0$$

$\therefore y = Ae^{-x} + Be^{-2x}$ is a solution of $y'' + 5y' + 6y = 0$

REVIEW OF DIFFERENTIATION

Rules

1. Constant: $\dfrac{d}{dx}c = 0$

2. Constant Multiple: $\dfrac{d}{dx}cf(x) = c\,f'(x)$

3. Sum: $\dfrac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$

4. Product: $\dfrac{d}{dx}f(x)g(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

5. Quotient: $\dfrac{d}{dx}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

6. Chain: $\dfrac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$

7. Power: $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

8. Power: $\dfrac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$

Functions

Trigonometric:

9. $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$

10. $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

11. $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

12. $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

13. $\dfrac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

14. $\dfrac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$

Inverse trigonometric:

15. $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

16. $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1} x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

17. $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1} x = \dfrac{1}{1+x^2}$

18. $\dfrac{d}{dx}\cot^{-1} x = -\dfrac{1}{1+x^2}$

19. $\dfrac{d}{dx}\sec^{-1} x = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

20. $\dfrac{d}{dx}\csc^{-1} x = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Hyperbolic:

21. $\dfrac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$

22. $\dfrac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$

23. $\dfrac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x$

24. $\dfrac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x$

25. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$

26. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$

Inverse hyperbolic:

27. $\dfrac{d}{dx}\sinh^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

28. $\dfrac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

29. $\dfrac{d}{dx}\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{1-x^2}$

30. $\dfrac{d}{dx}\coth^{-1} x = \dfrac{1}{1-x^2}$

31. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1} x = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

32. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1} x = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$

Exponential:

33. $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$

34. $\dfrac{d}{dx}b^x = b^x(\ln b)$

Logarithmic:

35. $\dfrac{d}{dx}\ln|x| = \dfrac{1}{x}$

36. $\dfrac{d}{dx}\log_b x = \dfrac{1}{x(\ln b)}$

BRIEF TABLE OF INTEGRALS

1. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

2. $\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$

3. $\int e^u\,du = e^u + C$

4. $\int a^u\,du = \frac{1}{\ln a}a^u + C$

5. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$

6. $\int \cos u\,du = \sin u + C$

7. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

8. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

9. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

10. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

11. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$

12. $\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$

13. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

14. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

15. $\int u \sin u\,du = \sin u - u\cos u + C$

16. $\int u \cos u\,du = \cos u + u\sin u + C$

17. $\int \sin^2 u\,du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\sin 2u + C$

18. $\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u + C$

19. $\int \tan^2 u\,du = \tan u - u + C$

20. $\int \cot^2 u\,du = -\cot u - u + C$

21. $\int \sin^3 u\,du = -\frac{1}{3}\left(2 + \sin^2 u\right)\cos u + C$

22. $\int \cos^3 u\,du = \frac{1}{3}\left(2 + \cos^2 u\right)\sin u + C$

23. $\int \tan^3 u\,du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$

24. $\int \cot^3 u\,du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\sin u| + C$

25. $\int \sec^3 u\,du = \frac{1}{2}\sec u \tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$

26. $\int \csc^3 u\,du = -\frac{1}{2}\csc u \cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$

27. $\int \sin au \cos bu\,du = \frac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)u}{2(a+b)} + C$

28. $\int \cos au \cos bu\,du = \frac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)u}{2(a+b)} + C$

29. $\int e^{au} \sin bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}\left(a \sin bu - b\cos bu\right) + C$

30. $\int e^{au} \cos bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}\left(a \cos bu + b\sin bu\right) + C$

31. $\int \sinh u\,du = \cosh u + C$

32. $\int \cosh u\,du = \sinh u + C$

33. $\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u + C$

34. $\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + C$

35. $\int \tanh u\,du = \ln(\cosh u) + C$

36. $\int \coth u\,du = \ln|\sinh u| + C$

37. $\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$

38. $\int u \ln u\,du = \frac{1}{2}u^2 \ln u - \frac{1}{4}u^2 + C$

39. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

40. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}\,du = \ln\left|u + \sqrt{a^2+u^2}\right| + C$

41. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

42. $\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{a^2+u^2}\right| + C$

43. $\int \frac{1}{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

44. $\int \frac{1}{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$

Note: Some techniques of integration, such as integration by parts and partial fractions, are reviewed in the *Student Resource and Solutions Manual* that accompanies this text.

TABLE OF LAPLACE TRANSFORMS

	$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$
1.	1	$\dfrac{1}{s}$
2.	t	$\dfrac{1}{s^2}$
3.	t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$, n a positive integer
4.	$t^{-1/2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$
5.	$t^{1/2}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$
6.	t^{α}	$\dfrac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}$, $\alpha > -1$
7.	$\sin kt$	$\dfrac{k}{s^2 + k^2}$
8.	$\cos kt$	$\dfrac{s}{s^2 + k^2}$
9.	$\sin^2 kt$	$\dfrac{2k^2}{s(s^2 + 4k^2)}$
10.	$\cos^2 kt$	$\dfrac{s^2 + 2k^2}{s(s^2 + 4k^2)}$
11.	e^{at}	$\dfrac{1}{s - a}$
12.	$\sinh kt$	$\dfrac{k}{s^2 - k^2}$
13.	$\cosh kt$	$\dfrac{s}{s^2 - k^2}$
14.	$\sinh^2 kt$	$\dfrac{2k^2}{s(s^2 - 4k^2)}$
15.	$\cosh^2 kt$	$\dfrac{s^2 - 2k^2}{s(s^2 - 4k^2)}$
16.	te^{at}	$\dfrac{1}{(s - a)^2}$
17.	$t^n e^{at}$	$\dfrac{n!}{(s - a)^{n+1}}$, n a positive integer
18.	$e^{at} \sin kt$	$\dfrac{k}{(s - a)^2 + k^2}$
19.	$e^{at} \cos kt$	$\dfrac{s - a}{(s - a)^2 + k^2}$

	$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$
20.	$e^{at} \sinh kt$	$\dfrac{k}{(s - a)^2 - k^2}$
21.	$e^{at} \cosh kt$	$\dfrac{s - a}{(s - a)^2 - k^2}$
22.	$t \sin kt$	$\dfrac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$
23.	$t \cos kt$	$\dfrac{s^2 - k^2}{(s^2 + k^2)^2}$
24.	$\sin kt + kt \cos kt$	$\dfrac{2ks^2}{(s^2 + k^2)^2}$
25.	$\sin kt - kt \cos kt$	$\dfrac{2k^3}{(s^2 + k^2)^2}$
26.	$t \sinh kt$	$\dfrac{2ks}{(s^2 - k^2)^2}$
27.	$t \cosh kt$	$\dfrac{s^2 + k^2}{(s^2 - k^2)^2}$
28.	$\dfrac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\dfrac{1}{(s - a)(s - b)}$
29.	$\dfrac{ae^{at} - be^{bt}}{a - b}$	$\dfrac{s}{(s - a)(s - b)}$
30.	$1 - \cos kt$	$\dfrac{k^2}{s(s^2 + k^2)}$
31.	$kt - \sin kt$	$\dfrac{k^3}{s^2(s^2 + k^2)}$
32.	$\dfrac{a \sin bt - b \sin at}{ab(a^2 - b^2)}$	$\dfrac{1}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$
33.	$\dfrac{\cos bt - \cos at}{a^2 - b^2}$	$\dfrac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$
34.	$\sin kt \sinh kt$	$\dfrac{2k^2 s}{s^4 + 4k^4}$
35.	$\sin kt \cosh kt$	$\dfrac{k(s^2 + 2k^2)}{s^4 + 4k^4}$
36.	$\cos kt \sinh kt$	$\dfrac{k(s^2 - 2k^2)}{s^4 + 4k^4}$
37.	$\cos kt \cosh kt$	$\dfrac{s^3}{s^4 + 4k^4}$
38.	$J_0(kt)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2 + k^2}}$

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

(Differential Equations of First Order and First Degree):

وهي المعادلات التي تكون بإحدى الأشكال الآتية:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

أو $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

أو $M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$

حيث ان M, N, f دوال تحتوي على x أو y أو كلاهما أو قد تكون دوال ثابتة.

طرق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى:

(١) المعادلات التفاضلية التي تنفصل متغيراتها:

هــي المعــادلات مــن النــوع: $f(y)dy + g(x)dx = 0$ وحلهـا يكـون بتكامـل الطرفين ، أي أنَّ (حيث C ثابت اختياري) $\int f(y)\,dy + \int g(x)\,dx = C$.

Examples: Solve the following equation: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$

الحل: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow xdy = 2ydx$

فصل المتغيرات يتم بقسمة الطرفين على yx ينتج ان:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + C \Rightarrow \ln|y| - 2\ln|x| = C$$

$$\Rightarrow \ln|y| - \ln|x^2| = C \Rightarrow \ln\frac{y}{x^2} = C \Rightarrow \frac{y}{x^2} = C \Rightarrow \frac{y}{x^2} = e^C$$

$y = x^2 e^C$ (ثابت اختياري C)

ويمكن ان نفرض الثابت الاختياري $e^c = c_1$ فيكون الحل:

$$\boldsymbol{y = c_1 x^2}$$

<u>Examples:</u> Solve the following equation: $(x+1)\frac{dy}{dx} = x^2(y^2+1)$

الحل: بضرب الطرفين في dx ينتج ان: $(x+1)dy = x^2(y^2+1)dx$

فصل الطرفين يتم بقسمة الطرفين على $(x+1)(y^2+1)$ ينتج:

$$\frac{dy}{y^2+1} = \frac{x^2dx}{x+1} \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2+1} = \int \frac{x^2dx}{x+1}$$

التكامل الثاني $\int \frac{x^2}{x+1}\, dx$ يحل بالقسمة الطويلة لان درجة البسط اكبر من درجة المقام

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 1 \\
\hline
x + 1 & x^2 \\
 & \underline{x^2 + x} \\
 & -x \\
 & \underline{-x - 1} \\
 & 1
\end{array}
$$

ونستخدم القانون التالي لتبسيط المقدار

$$\text{الكسر} = \left(\text{ناتج القسمة} + \frac{\text{باقي القسمة}}{\text{المقسوم عليه}} \right)$$

وعليه نحصل على

$$\int \frac{x^2}{x+1} dx = \int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2+1} = \int (x-1+\frac{1}{x+1})\,dx \Rightarrow \tan^{-1} y = \int x\,dx - \int dx + \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1} y = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C$$

$$\Rightarrow y = \tan(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C)$$

Examples: Solve the following equation: $\frac{dy}{dx} = \frac{x - xy^2}{x^2y - y}$

الحل: $\frac{dy}{dx} = \frac{x(1-y^2)}{y(x^2-1)} \Rightarrow y(x^2-1)dy = x(1-y^2)dx$

فصل المتغيرات يتم بقسمة الطرفين على $(x^2-1)(1-y^2)$ ينتج ان:

$$\frac{ydy}{1-y^2} = \frac{xdx}{x^2-1} \Rightarrow \int \frac{ydy}{1-y^2} = \int \frac{xdx}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{-2ydy}{1-y^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2-1} \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln|1-y^2| = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C$$

Examples:

$$\sin^2 x \cos y \, dx + \sin y \sec x \, dy = 0$$

الحل: فصل المتغيرات يتم بقسمة الطرفين على $\cos y \sec y$ ينتج ان:

$$\frac{\sin^2 x}{\sec x} dx + \frac{\sin y}{\cos y} dy = 0 \Rightarrow \int \sin^2 x \cos x \, dx + \int \frac{\sin y}{\cos y} dy = C$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^3 x}{3} - \int \frac{-\sin y}{\cos y} dy = C \Rightarrow \frac{\sin^3 x}{3} - \ln|\cos y| = C$$

هناك حالة واحد تكون فيها المعادلة غير قابلة للفصل ويمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات كما ياتي:

اذا كانت $y' = f(x+y)$ اي ان $\frac{dy}{dx} = f(x+y)$ فان

1. افرض $z = x + y$.
2. نشتق الفرضية بالنسبة الى x:

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

3. $\frac{dz}{dx} = 1 + f(z)$.
4. نحل المعادلة الناتجة بفصل المتغيرات ثم نرجع الفرضية بعد ايجاد الحل.

$$dz = \big(1 + f(z)\big)dx$$

$$\int \frac{dz}{1+f(z)} = \int dx$$

$$\rightarrow \int \frac{dz}{1+f(z)} = x + c$$

Examples:

$$\frac{dy}{dx} = (x+y)^2$$

$$\text{Let } z = x + y \rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 + z^2$$

$$\frac{dz}{1+z^2} = dx$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int dx$$

$$\tan^{-1} z = x + c \rightarrow z = \tan(x+c)$$

$$x + y = \tan(x+c)$$

$$\therefore y = \tan(x+c) - x$$

H.W:

- $2x(y+1)dx - ydy = 0$
- $x^2(1-y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$
- $(y^2+y)dx - (x^2-x)dy = 0$
- $y' = \frac{1+y}{1+x}$
- $y' = e^{x+y}$
- $x^2(y+1)dx + y^2(x-1)dy = 0$
- $y' = \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}$
- $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$
- $(1+y^2)dx - \sqrt{1-x^2}dy = 0$

(٢) المعادلات المتجانسة من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

:(Homogenous Equations of First Order and First Degree)

تعريف: يقال للدالة $f(x,y)$ بأنها متجانسة من الدرجة n إذا حققت الشرط الآتي:

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y) \qquad (t > 0)$$

$$or \quad f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

أمثلة: بيِّن فيما إذا كانت الدوال الآتية متجانسة، ثم جد درجة كل منهما:

$$(1) \quad f(x,y) = 7x^2 + 8xy - gy^2$$

الحل: $f(tx,ty) = 7(tx)^2 + 8(tx)(ty) - g(ty)^2 = 7t^2x^2 + 8t^2xy - gt^2y^2$

$$= t^2(7x^2 + 8xy - gy^2)$$
$$= t^2 f(x,y)$$

∴ الدالة $f(x,y)$ متجانسة ومن الدرجة ٢.

(2) $f(x,y) = x^3 - 2y^3 + 5y^2x$

الحل:

$$f(tx,ty) = (tx)^3 - 2(ty)^3 + 5(ty)^2(tx) = t^3x^3 - 2t^3y^3 + 5t^3y^2x$$
$$= t^3(x^3 - 2y^3 + 5y^2x)$$
$$= t^3 f(x,y)$$

$\therefore$ الدالة $f(x,y)$ متجانسة ومن الدرجة ٣.

(3) $f(x,y) = gx^2 - xy + 2x$

الحل:

$$f(tx,ty) = g(tx)^2 - (tx)(ty) + 2(tx) = gt^2x^2 - t^2xy + 2tx$$

$\therefore$ الدالة ليست متجانسة.

تعريـــف: المعادلـــة التفاضـــلية $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ يقـــال أنهـــا متجانسة، إذا كانت كل من M و N دالة متجانسة ومتساوية بالدرجة.

مثال: $(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0$

$N(x,y)$ متجانسة من الدرجة ٢. $M(x,y)$ متجانسة من الدرجة ٢.

∴ المعادلة هي معادلة تفاضلية متجانسة.

حل المعادلات التفاضلية المتجانسة:

الحل يتم بالتعويض الآتي:

$$y = vx$$
$$dy = vdx + xdv$$

فتتحول المعادلة التفاضلية المتجانسة إلى معادلة تفاضلية تنفصل متغيراتها يمكن

إيجاد حلها بسهولة، وكما هو موضّح في الأمثلة الآتية:

أمثلة:

(1) $(x^2 - xy + y^2)dx - xy\,dy = 0$

الحل: المعادلة التفاضلية متجانسة تحل بفرض:

$$y = vx \Rightarrow dy = vdx + xdv$$

بالتعويض في المعادلة ينتج أن:

$$(x^2 - x(vx) + (vx)^2)dx - x(vx)(vdx + xdv) = 0$$
$$\Rightarrow (x^2 - x^2v + v^2x^2)dx - x^2v(vdx + xdv) = 0$$
$$\Rightarrow (x^2 - x^2v + v^2x^2 - x^2v^2)dx - x^3vdv = 0$$
$$\Rightarrow x^2(1 - v)dx - x^3vdv = 0$$

يتم فصل المتغيرات بقسمة الطرفين على $x^3(1-v)$

$$\therefore \frac{dx}{x} - \frac{v}{1-v}dv = 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{x} + \int \frac{v}{v-1}dv = \int 0$$

$$\Rightarrow \ln x + \int \frac{(v-1)+1}{v-1}dv = C \Rightarrow \ln x + \int dv + \int \frac{dv}{v-1} = C$$

$$\Rightarrow \ln x + v + \ln|v-1| = C \Rightarrow \ln x + \frac{y}{x} + \ln|\frac{y}{x} - 1| = C$$

(2) $\quad xdy - \left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right)dx = 0$

$\therefore$ المعادلة التفاضلية متجانسة ومن الدرجة الأولى تحل بفرض:

$$y = vx \Rightarrow dy = vdx + xdv$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية ينتج أن:

$$x(vdx + xdv) - \left(vx + \sqrt{x^2 - v^2x^2}\right)dx = 0$$

$$\Rightarrow xvdx + x^2dv - \left(vx + \sqrt{x^2(1 - v^2)}\right)dx = 0$$

$$\Rightarrow xvdx + x^2dv - \left(vx + x\sqrt{(1 - v^2)}\right)dx = 0$$

$$\Rightarrow xvdx + x^2dv - vxdx - x\sqrt{1 - v^2}dx = 0$$

$$\Rightarrow x^2dv - x\sqrt{1 - v^2}dx = 0 \Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} - \frac{dx}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} - \int \frac{dx}{x} = C \Rightarrow \sin^{-1} v - \ln|x| = C$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \ln|x| = C$$

H.W:

(1) $(xy - y^2)dx - x^2dy = 0$

(2) $(2xy + y^2)dx - 2x^2dy = 0$

(3) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$

(٣) المعادلات التفاضلية التامة من الرتبة الاولى والدرجة الاولى

Exact Differential Equations of First Order and First Degree

لتكن المعادلة التفاضلية :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = o \qquad (1)$$

فالشرط اللازم والكافي لتكون هذه المعادلة تامة هو:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

طريقة الحل:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

1- نثبت ان $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

2- حل المعادلة التامة سيكون بالصيغة:

$$\int M\,dx + \int n\,dy = 0$$

حيث ان n هي جزء من الدالة N بحيث انه لايحتوي على المتغير x. او نستخدم الصيغة الاخرى:

$$\int N\,dy + \int m\,dx = 0$$

حيث ان m هي جزء من الدالة M بحيث انه لايحتوي على المتغير y .

Example Solve the differential equation:

$$(ye^x + 2x\cos y)dx + (e^x - \cos y - x^2\sin y)dy = 0$$

Solution:

$$M = ye^x + 2x\cos y \to \frac{\partial M}{\partial y} = e^x - 2x\sin y$$

$$N = e^x - \cos y - x^2\sin y \to \frac{\partial N}{\partial x} = e^x - 2x\sin y$$

$$\to \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

The differential equation is exact and the general solution is:

$$\int M\,dx + \int n\,dy = 0$$

$$\to \int(ye^x + 2x\cos y)\,dx + \int -\cos y\,dy = 0$$

$$\boxed{\therefore ye^x + x^2\cos y - \sin y + c = 0}$$

Example Solve the differential equation:

$$(e^y + x\sin xy)\frac{dy}{dx} + y\sin xy = 0$$

Solution: $y\sin xy\,dx + (e^y + x\sin xy)dy = 0$

$$M = y\sin xy \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = y\cos xy\,.\,x + \sin xy$$

$$= xy\cos xy + \sin xy$$

$$N = e^y + x\sin xy \rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = x\cos xy\,.\,y + \sin xy$$

$$= xy\cos xy + \sin xy$$

$\rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, The differential equation is exact and its solution is:

$$\int M\,dx + \int n\,dy = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{-\cos xy + e^y + c = 0}$$

H.w:

- $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$
- $(4x^3y^2 - 2xy)dx + (2x^4y - x^2)dy = 0$
- $(3e^{3x}y - 2x)dx + e^{3x}dy = 0$

المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الأولي

Linear First Order Differential Equations

المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الأولي

Linear First - Order Differential Equations

IV.1- المعادلة التفاضلية الخطية — Linear Differential Equation

سبق أن عرفنا المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة n ويهمنا هنا المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى والتي تكتب على الصورة :-

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (1)$$

حيث $P(x)$ و$Q(x)$ دالتان في المتغير x فقط .

طريقة الحل:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Integrating Factor: $e^{\int P(x)dx}$

فان حل المعادلة الخطية سيكون بالصيغة:

$$ye^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx}.Q(x)\,dx + c$$

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx}.Q(x)\,dx + c\right]$$

وفي حالة كون المتغير x هو المعتمد والمتغير y هو المستقل اي تكتب العادلة بالشكل:

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$$

فان حل المعادلة الخطية سيكون بالصيغة:

$$x = e^{-\int P(y)dy}\left[\int e^{\int P(y)dy}.\,Q(y)\,dy + c\right]$$

Example Solve the differential equation:

$$xy' - 2y - x^3e^x = 0$$

Solution:

$$y' - \frac{2}{x}y - x^2e^x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^2e^x\ ,\ P(x) = -\frac{2}{x}\ ,Q(x) = x^2e^x$$

Integrating Factor: $e^{\int P(x)dx}$

$$e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\int\frac{dx}{x}} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

Integrating Factor: $e^{\int P(x)dx}$

$$e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\int\frac{dx}{x}} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$ye^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx}.Q(x) + c$$

$$\frac{y}{x^2} = \int \frac{1}{x^2}.(x^2e^x)dx \ + c$$

$$\frac{y}{x^2} = \int e^x dx \ + c$$

$$\frac{y}{x^2} = e^x + c \rightarrow \quad y = x^2e^x + cx^2$$

Example Solve the differential equation:

$$x\frac{dy}{dx} - ay = x + 1$$

Solution:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{a}{x}y = \frac{x+1}{x}$$

$$P(x) = -\frac{a}{x}\,, Q(x) = \frac{x+1}{x}$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int -\frac{a}{x}dx} = e^{-a\int\frac{dx}{x}} = e^{-a\ln x} = e^{\ln x^{-a}} = x^{-a} = \frac{1}{x^{a}}$$

$$ye^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx}.Q(x) + c$$

$$\frac{y}{x^a} = \int \frac{1}{x^a}.\left(\frac{x+1}{x}\right) dx \ + c$$

$$\frac{y}{x^a} = \int \frac{x+1}{x^{a+1}} dx \ + c$$

$$y = x^a\left[\int (x+1).\, x^{-a-1} dx \ + c\right]$$

$$= x^a\left[\int (x^{-a} + x^{-a-1}) dx \ + c\right]$$

$$= x^a\left[\frac{x^{-a+1}}{-a+1} - \frac{x^{-a}}{a} + c\right]$$

$$= \frac{x}{-a+1} - \frac{1}{a} + cx^a$$

H.w.

- $(x+1)\frac{dy}{dx} - ny = e^x (x+1)^{n+1}$
- $(x^2+1)\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x^2$

Example 1 Solve the following initial value problem (IVP):

$$\frac{dy}{dx} + y = \sin x \ , \ y(\pi) = 1$$

Solution The above DE is **linear**, since

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

$$P(x) = 1 \ , \qquad Q(x) = \sin x$$

Integrating Factor: $e^{\int P(x)dx} = e^{\int dx} = e^x$

The solution of the DE is:

$$ye^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx} Q(x)\, dx + c$$

$$ye^x = \int e^x \sin x \, dx + c$$

$$\int e^x \sin x\, dx = uv - \int v\, du = e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \cos x\, dx}_{}$$

$$u = \sin x \qquad dv = e^x dx$$
$$du = \cos x\, dx \qquad v = e^x$$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x - \int -e^x \sin x\, dx$$

$$u = \cos x \qquad dv = e^x dx$$
$$du = -\sin x\, dx \qquad v = e^x$$

$$\therefore \int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - [e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx]$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\, dx$$

$$\int e^x \sin x\, dx + \int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - e^x \cos x$$

$$2\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - e^x \cos x = \frac{1}{2} e^x \sin x - \frac{1}{2} e^x \cos x$$

$$ye^x = \frac{1}{2} e^x \sin x - \frac{1}{2} e^x \cos x + c$$

$$y = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) + ce^{-x}$$

Now, $y(\pi) = 1 \rightarrow 1 = \frac{1}{2}(\sin \pi - \cos \pi) + ce^{-\pi}$

$$1 = \frac{1}{2} + ce^{-\pi}$$

$$\frac{1}{2} = ce^{-\pi} \to c = \frac{1}{2}e^{\pi}$$

$$y = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}e^{\pi}e^{-x}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}e^{\pi - x}$$

Example 2 Find the general solution of the DE:

$$\left(y - 2xy - x^2\right)dx + x^2dy = 0$$

Solution The above DE is **linear**, since

$$\left((1-2x)y - x^2\right) + x^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^2\frac{dy}{dx} + (1-2x)y - x^2 = 0$$

$$x^2\frac{dy}{dx} + (1-2x)y = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{(1-2x)}{x^2}y = 1$$

$$P(x) = \frac{(1-2x)}{x^2}\ ,\ Q(x) = 1$$

Integrating Factor: $e^{\int P(x)dx} = e^{\int\frac{(1-2x)}{x^2}dx} = e^{\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)dx} = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$

$$\int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)dx = \int x^{-2}\,dx - 2\int\frac{1}{x}dx = -\frac{1}{x} - 2\ln x = -\frac{1}{x} - \ln x^2$$

$$\therefore e^{\frac{-1}{x}-\ln x^2} = e^{-\frac{1}{x}}e^{-\ln x^2} = e^{-\frac{1}{x}}e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

The solution of the DE is:

$$ye^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx}Q(x)\,dx + c$$

$$\frac{y}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = \int\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx + c$$

$$\frac{y}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}} + c$$

$$ye^{-\frac{1}{x}} = x^2e^{-\frac{1}{x}} + cx^2$$

$$\therefore y = x^2 + cx^2e^{\frac{1}{x}}$$

Example 3 Solve the following IVP:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^2 - x + 1\,,\ y(1) = \frac{1}{2}$$

Solution The above DE is **linear**, and

$$P(x) = \frac{2}{x}\,,\ Q(x) = x^2 - x + 1$$

Integrating Factor: $e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$

The solution of the DE is:

$$ye^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx}Q(x)\,dx + c$$

$$yx^2 = \int x^2(x^2 - x + 1)\,dx + c$$

$$yx^2 = \int (x^4 - x^3 + x^2)\,dx + c$$

$$yx^2 = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + c$$

$$y = \frac{x^3}{5} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} + \frac{c}{x^2}$$

Now, $y(1) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{c}{1}$

$\frac{1}{2} = \frac{17}{60} + c$

$c = \frac{1}{2} - \frac{17}{60} \rightarrow c = \frac{13}{60}$

$$\therefore y = \frac{x^3}{5} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} + \frac{13}{60x^2}$$

Example 4 Find the solution of the following DE:

$$y' + \frac{1}{x\ln x}y = \frac{1}{2}$$

Solution The above DE is **linear**, since

$$P(x) = \frac{1}{x\ln x}\ ,\ Q(x) = \frac{1}{2}$$

Integrating Factor: $e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x\ln x}dx} = e^{\int \left(\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right)dx} = e^{\ln(\ln x)} = \ln x$

The solution of the DE is:

$$ye^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx}Q(x)\,dx + c$$

$$y\ln x = \int \frac{1}{2}\ln x\,dx + c$$

$$y\ln x = \frac{1}{2}\int \ln x\,dx + c$$

$$\int \ln x\,dx = uv - \int v\,du$$

$$= x\ln x - \int dx$$

$$= x\ln x - x$$

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = x$

$$y\ln x = \frac{1}{2}(x\ln x - x) + c$$

$$y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{x}{\ln x}\right) + \frac{c}{\ln x}$$

معادلة برنولي

The Equation of Bernoulli

الصيغة العامة للمعادلة هي:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \qquad (1)$$

حيث ان n عدد حقيقي و $P(x), Q(x)$ دوال مستمرة للمتغير المستقل x.

طريقة الحل:

المعادلة **(1)** هي لاخطية ويمكن تحويلها الى خطية بالخطوات التالية:

1- نضرب طرفي المعادلة بـ y^{-n} (نتخلص من معامل $Q(x)$)

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{-n+1} = Q(x) \qquad (2)$$

2- نفرض ان

$$v = y^{-n+1}$$

$$\frac{dv}{dx} = (-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{1}{(-n+1)}\frac{dv}{dx} = y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

3- نعوض في معادلة (2):

$$\frac{1}{(-n+1)}\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x)$$

4- نضرب طرفي المعادلة بـ $(-n+1)$ نحصل على:

$$\boxed{\frac{dv}{dx} + (-n+1)P(x)v = (-n+1)Q(x)}$$

و هذه المعادلة الخطية تحل باستخدام عامل التكامل.

ملاحظة:

في حالة كون المتغير x هو المعتمد والمتغير y هو المستقل اي تكتب المعادلة بالشكل:

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)x^n$$

Example Solve the differential equation:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^2y^6$$

Solution:

$$y^{-6}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y^{-5} = x^2 \quad \dots (*)$$

Let $v = y^{-5} \rightarrow \frac{dv}{dx} = -5y^{-6}\frac{dy}{dx}$

$$-\frac{1}{5}\frac{dv}{dx} = y^{-6}\frac{dy}{dx}$$

Substitute in (*)

$$-\frac{1}{5}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = x^2$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{5}{x}v = -5x^2$$

$P(x) = -\frac{5}{x}\,, Q(x) = -5x^2$

Integrating Factor: $e^{\int P(x)dx}$

$$e^{\int -\frac{5}{x}dx} = e^{-5\int\frac{dx}{x}} = e^{-5\ln x} = e^{\ln x^{-5}} = x^{-5} = \frac{1}{x^5}$$

$$ve^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx}.Q(x)dx + c$$

$\frac{v}{x^5} = \int \frac{1}{x^5}.(-5x^2)dx\ + c$

$v = x^5\left[\int -5x^{-3}dx\ + c\right]$

$v = x^5\left[-\frac{5}{-2}\,x^{-2} + c\right] \rightarrow\ \ v = \frac{5}{2}x^3 + cx^5$

$$\because v = y^{-5} \rightarrow y^{-5} = \frac{5}{2}x^3 + cx^5$$

Example Solve the differential equation:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1-x^2} y = x y^{\frac{-1}{2}}$$

Solution:

$$y^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx} + \frac{x}{1-x^2} y^{\frac{3}{2}} = x \qquad (*)$$

Let $v = y^{\frac{3}{2}} \rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx}$

$$\frac{2}{3}\frac{dv}{dx} = y^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx}$$

Substitute in (*)

$$\frac{2}{3}\frac{dv}{dx} + \frac{x}{1-x^2} v = x$$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{3}{2}\frac{x}{1-x^2} v = \frac{3}{2} x$$

$$P(x) = \frac{3x}{2(1-x^2)} , Q(x) = \frac{3}{2}x$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{3x}{2(1-x^2)} dx} = e^{-\frac{3}{4}\int \frac{-2x dx}{1-x^2}} = e^{-\frac{3}{4}\ln\left(1-x^2\right)} = e^{\ln\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{4}}}$$

$$= (1-x^2)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{4}}}$$

$$ve^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx} . Q(x)dx + c$$

$$\frac{v}{(1-x^2)^{\frac{3}{4}}} = \int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{4}}} . \frac{3}{2} x\, dx \ + c$$

$$v = (1-x^2)^{\frac{3}{4}} \left[\int \frac{3}{2} (1-x^2)^{\frac{-3}{4}} . x\, dx + c \right]$$

$$v = (1-x^2)^{\frac{3}{4}} \left[-\frac{3}{4} \int -2x(1-x^2)^{\frac{-3}{4}} dx + c \right]$$

$$v = (1-x^2)^{\frac{3}{4}}\left[-\frac{3}{4}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}{1/4} + c\right]$$

$$= (1-x^2)^{\frac{3}{4}}\left[-3(1-x^2)^{\frac{1}{4}} + c\right]$$

$$= (1-x^2) + c(1-x^2)^{\frac{3}{4}}$$

$$\because v = y^{\frac{3}{2}} \rightarrow \; y^{\frac{3}{2}} = (1-x^2) + c(1-x^2)^{\frac{3}{4}}$$

H.W.

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = xy^3$$

Example 1 Solve the following IVP:

$$6y' - 2y = xy^4,\ \ y(0) = -2$$

Solution Putting the DE in standard form of Bernoulli equation:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3}y = \frac{1}{6}xy^4$$

Dividing both sides by y^4 gives,

$$y^{-4}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3}y^{-3} = \frac{1}{6}x$$

Let $v = y^{-3} \rightarrow \frac{dv}{dx} = -3y^{-4}\frac{dy}{dx} \ \rightarrow -\frac{1}{3}\frac{dv}{dx} = y^{-4}\frac{dy}{dx}$

Substituting into the differential equation gives,

$$\frac{-1}{3}\frac{dv}{dx} - \frac{1}{3}v = \frac{1}{6}x$$

Multiplying both sides by -3, to get the linear DE:

$$\frac{dv}{dx} + v = -\frac{1}{2}x$$

$$P(x) = 1,\ \ Q(x) = -\frac{1}{2}x$$

Integrating Factor: $e^{\int dx} = e^x$

$$ve^x = \int e^x \frac{-1}{2}x\,dx + c$$

$$ve^x = -\frac{1}{2}\int xe^x\,dx + c \quad \text{(Integration by table)}$$

$$ve^x = -\frac{1}{2}(xe^x - e^x) + c$$

$$\xRightarrow{v=y^{-3}} y^{-3} = -\frac{1}{2}(x-1) + ce^{-x}$$

$$y(0) = -2 \rightarrow \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{2}(0-1) + ce^0 \rightarrow -\frac{1}{8} = \frac{1}{2} + c \rightarrow c = -\frac{5}{8}$$

$$\therefore y^{-3} = -\frac{1}{2}(x-1) - \frac{5}{8}e^{-x}$$

Example 2 Solve the following IVP:

$$y' = 5y + e^{-2x}y^{-2}, y(0) = 2$$

Solution Putting the DE in standard form of Bernoulli equation:

$$\frac{dy}{dx} - 5y = e^{-2x}y^{-2}$$

Dividing both sides by y^{-2} gives,

$$y^2\frac{dy}{dx} - 5y^3 = e^{-2x}$$

Let $v = y^3 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 3y^2\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{1}{3}\frac{dv}{dx} = y^2\frac{dy}{dx}$

Substituting into the differential equation gives,

$$\frac{1}{3}\frac{dv}{dx} - 5v = e^{-2x}$$

Multiplying both sides by 3, to get the linear DE:

$$\frac{dv}{dx} - 15v = 3e^{-2x}$$

$$P(x) = -15,\ Q(x) = 3e^{-2x}$$

Integrating Factor: $e^{\int -15dx} = e^{-15x}$

$$ve^{-15x} = \int e^{-15x}.3e^{-2x}\,dx + c$$

$$ve^{-15x} = \frac{-3}{17}\int -17e^{-17x}\,dx + c$$

$$ve^{-15x} = -\frac{3}{17}e^{-17x} + c$$

$$v = ce^{15x} - \frac{3}{17}e^{-2x}$$

$$\xRightarrow{v=y^3} y^3 = ce^{15x} - \frac{3}{17}e^{-2x}$$

$y(0) = 2 \rightarrow (2)^3 = ce^0 - \frac{3}{17}e^0 \rightarrow 8 = c - \frac{3}{17} \rightarrow c = \frac{139}{17}$

$$\therefore y^3 = \frac{139}{17}e^{15x} - \frac{3}{17}e^{-2x}$$

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية وذات معاملات ثابتة

LINEAR EQUATIONS OF SECOND ORDER WITH CONSTANT COEFFICIENTS

الصيغة العامة للمعادلة الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية وذات معاملات ثابتة هي:

$$\textbf{(A)} \qquad \boldsymbol{ay'' + by' + cy = 0}$$

حيث ان a, b, c ثوابت و $a \neq 0$ لانه اذا كان $a = 0$ سوف

تصبح المعادلة من الرتبة الاولى.

طريقة الحل:

المعادلة (A) خطية ويمكن حلها بالخطوات التالية:

نفرض ان $y = e^{mx}$ فان المعادلة (A) تصبح

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$$

لكي نجد الحل $y = e^{mx}$ يجب ان نجد قيمة m وكمايأتي:

$$(am^2 + bm + c)e^{mx} = 0$$

الدالة الاسية $e^{mx} \neq 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$ وعليه فان

$$(*) \quad am^2 + bm + c = 0$$

المعادلة (*) تسمى المعادلة المميزة (Auxiliary Equation) وهي متعددة حدود من الدرجة الثانية ويمكن حلها بالدستور:

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

والان لدينا ثلاث حالات لجذور المعادلة بالاعتماد على المقدار المميز $\sqrt{b^2-4ac}$:

1. اذا كان $b^2-4ac>0$ فان:

$$m_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \; , m_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ويكون الحل بالشكل:

$$\boldsymbol{y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}}$$

Example Solve the following differential equation:

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \qquad (*)$$

Solution:

Let $y = e^{mx} \rightarrow y' = me^{mx}, y'' = m^2 e^{mx}$

Substitute in (*)

$$m^2 e^{mx} - 5me^{mx} + 6e^{mx} = 0$$

$\rightarrow (m^2 - 5m + 6) = 0,\ e^{mx} \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\rightarrow m^2 - 5m + 6 = 0$

$(m-2)(m-3) = 0 \rightarrow m = 2,\ m = 3$

$$\boxed{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}}$$

2. اذا كان $b^2 - 4ac = 0$ فان:

$$m_1 = m_2 = \frac{-b}{2a}$$

ويكون الحل بالشكل:

$$y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}$$

$$\boldsymbol{y = (c_1 + c_2 x) e^{mx}}$$

Example Solve the following differential equation:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Solution:

Let $y = e^{mx} \rightarrow y' = me^{mx}, y'' = m^2 e^{mx}$

Solution:

Let $y = e^{mx} \rightarrow y' = me^{mx}, y'' = m^2e^{mx}$

Substitute in the above equation

$$m^2e^{mx} - 2me^{mx} + e^{mx} = 0$$

$\rightarrow (m^2 - 2m + 1)e^{mx} = 0,\ e^{mx} \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0$

$\rightarrow (m-1)^2 = 0$

$\rightarrow m = 1, m = 1$

$$\therefore y = (c_1 + c_2x)e^x$$

3. اذا كان $b^2 - 4ac < 0$ فان m_1, m_2 جذور عقدية مترافقة و هذا يعني ان:

$$m_1 = \alpha + i\beta \;, m_2 = \alpha - i\beta$$

ويكون الحل بالشكل:

$$\boldsymbol{y = e^{\alpha x}[A\cos\beta x + B\sin\beta x]}$$

Example Solve the following differential equation:

$$y'' + k^2 y = 0$$

Solution:

Let $y = e^{mx} \rightarrow y' = me^{mx} \,, y'' = m^2 e^{mx}$

Substitute in the above equation

$$m^2 e^{mx} + k^2 e^{mx} = 0$$

$$\rightarrow (m^2 + k^2)e^{mx} = 0,\ e^{mx} \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow m^2 + k^2 = 0 \rightarrow m^2 = -k^2 \rightarrow m = \pm\sqrt{-k^2} = \pm\sqrt{-1}\, k$$

$$\rightarrow m = \pm ik\ ,\quad \alpha = 0\ \&\ \beta = k$$

$$\therefore y = e^{\alpha x}[A\cos\beta x + B\sin\beta x]$$

$$y = A\cos kx + B\sin kx$$

الجدول الاتي يوضح ملخص الحالات الثلاث لجذور المعادلة المميزة:

جذرا المعادلة المميزة	المميز	الحلول	الحل العام
حقيقيان مختلفان	$b^2 - 4ac > 0$	$e^{m_1 x}, e^{m_2 x}$	$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$
عقديان مترافقان	$b^2 - 4ac < 0$	$e^{\alpha x} \cos \beta x , e^{\alpha x} \sin \beta x$	$y = e^{\alpha x}[A \cos \beta x + B \sin \beta x]$
متساويان $m = -\frac{b}{2a}$ (جذور مكررة)	$b^2 - 4ac = 0$	e^{mx}, xe^{mx}	$y = (c_1 + c_2 x)e^{mx}$

Example 1 Solve the following DE:

$$y'' - 6y' + 5y = 0$$

Solution: Linear 2nd-order DE with constant coefficients. Let $y = e^{mx}$, then $y' = me^{mx}$ and $y'' = m^2 e^{mx}$and

$$m^2 e^{mx} - 6me^{mx} + 5e^{mx} = 0$$

$$(m^2 - 6m + 5)e^{mx} = 0$$

The auxiliary equation is

$$m^2 - 6m + 5 = 0$$

The roots are real and distinct:

$$m_1 = 1, \;\; m_2 = 5$$

Then the solution is

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{5x}$$

Example 2 Find the general solution of DE:

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

Solution: Linear 2nd-order DE with constant coefficients. Let $y = e^{mx}$, then $y' = me^{mx}$ and $y'' = m^2 e^{mx}$and

$$m^2 e^{mx} - 6me^{mx} + 9e^{mx} = 0$$

$$(m^2 - 6m + 9)e^{mx} = 0$$

The auxiliary equation is

$$m^2 - 6m + 9 = 0$$

The roots are real and repeated:

$$m_1 = m_2 = 3$$

Then the solution is

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{3x}$$

Example 3 Find the general solution of DE:

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

Solution: Linear 2nd-order DE with constant coefficients. Let $y = e^{mx}$, then $y' = me^{mx}$ and $y'' = m^2 e^{mx}$and

$$m^2 e^{mx} - 4me^{mx} + 5e^{mx} = 0$$

$$(m^2 - 4m + 5)e^{mx} = 0$$

The auxiliary equation is

$$m^2 - 4m + 5 = 0$$

The roots are complex conjugated:

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i \rightarrow \alpha = 2,\ \beta = 1$$

Then the solution is

$$y = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \sin x$$

Example 1 Solve the following DE:

$$y'' - 4y' - 12y = 3e^{5x} \qquad (*)$$

Solution: Nonhomogeneous Linear 2nd-order DE with constant coefficients. Taking its corresponding homogeneous DE:

$$y'' - 4y' - 12y = 0$$

Let $y = e^{mx}$, then $y' = me^{mx}$ and $y'' = m^2e^{mx}$and

$$m^2e^{mx} - 4me^{mx} - 12e^{mx} = 0$$

$$(m^2 - 4m - 12)e^{mx} = 0$$

The auxiliary equation is

$$m^2 - 4m - 12 = 0$$

The roots are real and distinct:

$$m_1 = -2, \;\; m_2 = 6$$

Then the solution is

$$y_c(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{6x}$$

Let $y_p(x) = Ae^{5x}$, then

$$y_p' = 5Ae^{5x}, y_p'' = 25Ae^{5x}$$

Substitute in (*) $y_p'' - 4y_p' - 12y_p = 3e^{5x}$ we get:

$$25Ae^{5x} - 4(5Ae^{5x}) - 12(Ae^{5x}) = 3e^{5x}$$

$$25Ae^{5x} - 20Ae^{5x} - 12Ae^{5x} = 3e^{5x}$$

$$-7Ae^{5x} = 3e^{5x} \rightarrow -7A = 3 \rightarrow A = -\frac{3}{7}$$

$$\rightarrow y_p(x) = -\frac{3}{7}e^{5x}$$

$$\therefore y(x) = y_c(x) + y_p(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{6x} - \frac{3}{7} e^{5x}$$

Example 2 Find the general solution of DE:

$$y'' - 4y' - 12y = \sin 2x \qquad (*)$$

Solution: Nonhomogeneous linear 2nd-order DE with constant coefficients. From the previous example, the general solution of the corresponding homogeneous DE $y_c(x)$ is:

$$y_c(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{6x}$$

Let $y_p(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$, then

$$y_p' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x\,, \qquad y_p'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

Substitute in (*) $y_p'' - 4y_p' - 12y_p = \sin 2x$ we get:

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 4(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) - 12(A\cos 2x + B\sin 2x) = \sin 2x$$

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 8A\sin 2x - 8B\cos 2x - 12A\cos 2x - 12B\sin 2x = \sin 2x$$

$$(-16A - 8B)\cos 2x + (8A - 16B)\sin 2x = \sin 2x$$

$$-16A - 8B = 0 \to B = -2A$$

$$8A - 16B = 1 \to 8A + 32A = 1 \to 40A = 1$$

$$A = \frac{1}{40}\,, B = -\frac{1}{20}$$

$$\to y_p(x) = \frac{1}{40}\cos 2x - \frac{1}{20}\sin 2x$$

Then the solution of the given nonhomogeneous DE is

$$\therefore y(x) = y_c(x) + y_p(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{6x} + \frac{1}{40}\cos 2x - \frac{1}{20}\sin 2x$$

Example 3 Find the general solution of DE:

$$y'' - 4y' - 12y = 2x^3 - x + 3 \qquad (*)$$

Solution: Nonhomogeneous linear 2nd-order DE with constant coefficients. From example (1), the general solution of the corresponding homogeneous DE $y_c(x)$ is:

$$y_c(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{6x}$$

Let $y_p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, then

$$y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \qquad y_p'' = 6Ax + 2B$$

Substitute in (*) $y_p'' - 4y_p' - 12y_p = 2x^3 - x + 3$ we get:

$$6Ax + 2B - 4\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) - 12\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) = 2x^3 - x + 3$$

$$6Ax + 2B - 12Ax^2 - 8Bx - 4C - 12Ax^3 - 12Bx^2 - 12Cx - 12D = 2x^3 - x + 3$$

$$-12Ax^3 + (-12A - 12B)x^2 + (6A - 8B - 12C)x + (2B - 4C - 12D) = 2x^3 - x + 3$$

$$-12A = 2 \to A = -\frac{1}{6}$$

$$-12A - 12B = 0 \to B = \frac{1}{6}$$

$$6A - 8B - 12C = -1 \to C = -\frac{1}{9}$$

$$2B - 4C - 12D = 3 \to D = -\frac{5}{27}$$

$$\to y_p(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x - \frac{5}{27}$$

Then the solution of the given nonhomogeneous DE is

$$\therefore y(x) = y_c(x) + y_p(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{6x} - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x - \frac{5}{27}$$

Example 4 Find the general solution of DE:

$$y'' - 4y' - 12y = 6 \qquad (*)$$

Solution: Nonhomogeneous linear 2nd-order DE with constant coefficients. From example (1), the general solution of the corresponding homogeneous DE $y_c(x)$ is:

$$y_c(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{6x}$$

Let $y_p(x) = A$, then

$$y_p' = 0, \qquad y_p'' = 0$$

Substitute in (*) $y_p'' - 4y_p' - 12y_p = 6$ we get:

$0 - 4(0) - 12A = 6$

$$-12A = 6 \rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$\rightarrow y_p(x) = -\frac{1}{2}$

Then the solution of the given nonhomogeneous DE is

$$\therefore y(x) = y_c(x) + y_p(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{6x} - \frac{1}{2}$$

Example 5 Find the general solution of DE:

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x} \qquad (*)$$

Solution: Nonhomogeneous linear 2nd-order DE with constant coefficients. The general solution of the corresponding homogeneous DE $y'' - 6y' + 9y = 0$ is:

$$y_c(x) = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$$

If we assume $y_p(x) = Ae^{3x}$, then will get a **duplication** with **first** term of $y_c(x)$.

If we assume $y_p(x) = Axe^{3x}$, then will get a **duplication** with **second** term of $y_c(x)$.

The right assumption is $y_p(x) = Ax^2e^{3x}$

$y_p' = 3Ax^2e^{3x} + 2Axe^{3x}$

$y_p'' = 9Ax^2e^{3x} + 6Axe^{3x} + 6Axe^{3x} + 2Ae^{3x}$

$\quad = 9Ax^2e^{3x} + 12Axe^{3x} + 2Ae^{3x}$

Substitute in (*) $y_p'' - 6y_p' + 9y_p = e^{3x}$we get:

$9Ax^2e^{3x} + 12Axe^{3x} + 2Ae^{3x} - 6\left(3Ax^2e^{3x} + 2Axe^{3x}\right) + 9Ax^2e^{3x} = e^{3x}$

$9Ax^2e^{3x} + 12Axe^{3x} + 2Ae^{3x} - 18Ax^2e^{3x} - 12Axe^{3x} + 9Ax^2e^{3x} = e^{3x}$

$2Ae^{3x} = e^{3x} \to 2A = 1 \to A = \frac{1}{2}$

$\to y_p(x) = \frac{1}{2}x^2e^{3x}$

Then the solution of the given nonhomogeneous DE is

$$\therefore\ y(x) = y_c(x) + y_p(x) = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + \frac{1}{2}x^2e^{3x}$$