الفصل الاول

التعاريف والمفاهيم ألاساسيه للمعادلات التفاضلية

الفصل الاول

التعاريف والمفاهيم الاساسية

1.1المقدمة

هذا الفصل يتضمن دراسه التعاريف والمفاهيم الاساسيه التي نحتاجها في بحثنا مثل المعادله التفاضليه ، درجه المعادله التفاضليه ، حل المعادله التفاضليه وغيرها

2.1 المعادلة التفاضلية Differential Equation

هي معادلة مكونة من دوال جبرية اودوال متسامية اومعا وتحوي مفاضلات اومشتقات

ومن الأمثله على المعادلات التفاضلية :

1.$\frac{d^2y}{dx^2}+3y=x^2$

2. $(3x+2y)^2\,\frac{dy}{dx}=1$

1.2.1المعادلة التفاضلية الاعتيادية Ordinary differential Equation

هي المعادلة التي تحتوي على متغير تابع واحدا او اكثر ومشتقاتة بالنسبة لمتغير مستقل واحد فقط ويمكن كتابه هذه المعادله على الصوره الاتية:

$$f(x,y,y',y",\ldots,y^n)=0$$

حيث ان

$$y'=\frac{dy}{dx}\ ,\qquad y"=\frac{d^2y}{dx^2}\ ,\ldots,y^{(n)}=d^ny/dx^n$$

ومن الامثله حول المعادلات التفاضلية الاعتيادية مايأتي

$1.1+2y'=8y"$

$2.x^2+2xyy'+yy"=zz'$

2.2.1المعادلة التفاضلية الجزئية *partial differential Equation*

هي المعادله التي تحتوي على متغيرتابع ودالة لاكثرمن متغير مستقل ومشتقاتها تكون جزئيه .كما في المعادله ادناه:

$$\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial z}=3$$

3.1 رتبة المعادلة التفاضلية Order Differential Equation

الرتبة اعلى مشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية .كما في الامثلة الاتية:

معادلة تفاضلية من الرتبة الخامسة $1.\frac{d^5y}{dx^5}-x\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)+x^3\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$

معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى $2.\frac{dy}{dx}+x^2y=e^x$

4.1درجة المعادلة التفاضلية Degree Differential Equation

هي اكبر قوة (اس) مرفوع له اعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية

كما في المعادلة التفاضلية من الدرجه الرابعه

$$(y'')^4=[1+(y')^2]^3$$

5.1المعادلة التفاضلية الخطية Linear Differential Equation

هي معادله خطية مهما كانت رتبتها تكون خطية اذا كان المتغير المعتمد فيها وجميع المشتقات التي تظهر فيها من الدرجة الاولى وغير مضروبة ببعضها وتكون صيغتها العامة هي

$$a_{\circ}y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=\mathrm{f(x)}$$

حيث المعاملات $a_{\circ},a_1,\ldots,a_n$ هي دوال الى x

و $f(x)$ دوال معرفه ضمن فتره معينه مثل $a\le x\le b$ اذا كانت $\mathrm{f(x)}=0$ عندما $a\le x\le b$ ينتج

$$a_{\circ}y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \qquad (1)$$

تسمى المعادله (1) معادلة تفاضلية خطية متجانسة اما اذا كانت المعاملات $a_{\circ}, a_1, \dots a_n$ ثوابتا تسمى (1) المعادلة الخطية ذات المعاملات الثابتة.

6.1حل المعادلة التفاضلية Solution of Differential Equation

هو علاقة بين متغيرات المعادلة التفاضلية بحيث ان هذه العلاقة تكون خالية من المشتقات ومعرفة على فترة معينة وتحقق المعادلة التفاضلية.

مثال على ذلك المعادلة التفاضلية

$$x\frac{dy}{dx} = x + y \qquad , x > 0$$

احد حلولها

$$y = x\log x - x$$

هذه المعادله خاليه من المشتقات ومعرفه ضمن فتره تواجد المعادله التفاضليه اي $x > 0$و تحقق المعادله التفاضليه اعلاه ولبرهان هذه حل المعادلة المطاة كما يلي

$$x\frac{dy}{dx}(x\log x - x)$$

$$x\left(x\frac{1}{x} + \log x - 1\right), x > 0$$

$$\therefore = x\log x$$

1.6.1الحل العام *General Solution*

هو الحل الذي يحتوي على عدد من الثوابت الاختيارية مساو لرتبة المعادلة التفاضلية.كما في المثال

$2y = x^2 + c$هو حل عام للمعادلة التفاضلية

$$dy - xdx = 0$$

ولغرض تحديد قيمه الثابت الاختياري c يجب معرفه قيمه من قيم المتغير المستقل xتقابلها بالطبع قيمه من قيم المتغير التابع y.

2.6.1الحل الخاص *Special Solution*

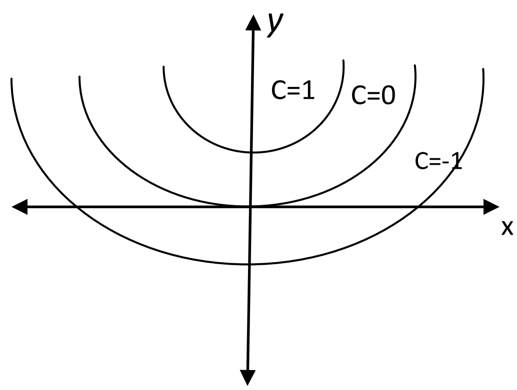
هو الحل الذي يمكن الحصول عليه من الحل العام بأعطاء بعض او كل الثوابت الاختيارية قيمة عدديه معينه .

*هندسياً الحل العام للمعادلة التفاضلية هو عائلة او مجموعة من المنحنيات.

*هندسيا الحل الخاص للمعادلة التفاضلية هو معادله منحني واحد فقط من هذه المنحنيات وتسمى هذه المنحنيات منحنيات تكامليه للمعادلة التفاضلية.

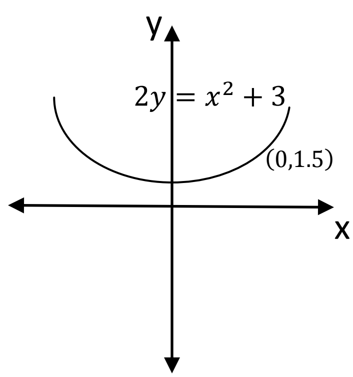
لايجاد المنحني التكاملي المار بالنقطه(1,2) عندما $x = 1, y = 2$ فأن $c = 3$ ويكون الحل الخاص او المنحني التكاملي للمعادله التفاضليه المار بالنقطه(1,2)هو

$$2y = x^2 + c$$



الحل العام

شكل(1)



الحل الخاص

شكل(2)

3.6.1الحل المنفرد Solution Single

هو الحل الذي قد يظهر في بعض المعادلات التفاضلية ويكون ليس من مجموعه الحل العام.

مثال على ذلك حل المعادلة التفاضلية

$$2y' = 3y^{\frac{1}{3}} \quad , x \in R$$

ان مجموعه حلها العام

$$y^2 = (x+c)^3 \ , \quad x + c > 0$$

حيث c ثابت أختياري

ان مخططات مجموعه الحل العام هي منحنيات التكامل التي تكون غير متقاطعه مع بعضها وواحد منها فقط يمر بنقطه معطاة من نقاط منطقه تواجد هذه المنحنيات.عند هذه النقطه تتحدد قيمه حقيقيه واحده للثابت الاختياري c.

فأذا كانت النقطه المعطاه $p(1,2\sqrt{2})$ تعوض في العنصر العام لمجموعه الحل أي في

$$(2\sqrt{2})^2 = (x+c)^3 \text{ ينتج } y^2 = (x+c)^3$$

ومنها ينتج$c = 1$ وبذلك تكون معادله منحني التكامل الذي يمر بالنقطه $p(1,2\sqrt{2})$ هي$y^2 = (x+1)^3$

ويمثل احد عناصر مجموعه حل المعادله التفاضليه والذي يتحقق باحداثيات النقطه$p(1,2\sqrt{2})$

نقوم بحل المعادله التفاضليه السابقه

$$2y' = 2\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{1}{3}}$$

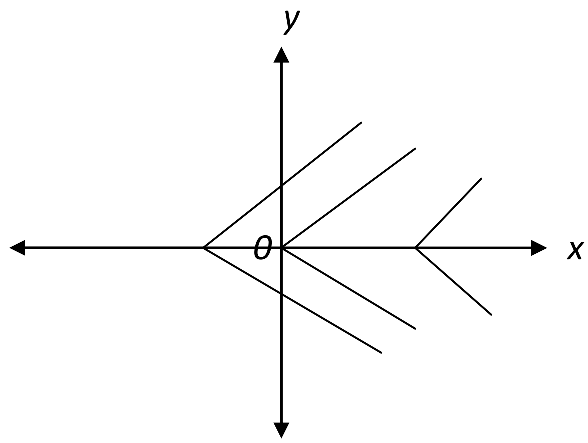
واجراء التكامل أي

$$\frac{2}{y^{\frac{1}{3}}}dy = 3dx$$

عمليه الفصل ممكنه اذا كان $y \neq 0$

اما اذا كان $y = 0$ فلا يمكن اجراء ذلك الفصل واذا كان $y = 0$ يحقق المعادله التفاضليه يصبح حلا منفرد.

ولما كان $y = 0$ فعلا يحقق المعادله التفاضليه $2y' = y^{\frac{1}{3}}$ فأنه حل منفرد ان هذا الحل المنفرد $y = 0$ ليس عنصرا من مجموعه الحل العام $y^2 = (x + c)^{\frac{1}{3}}$ لأيه قيمه c وبذلك $y = 0$ هو حل منفرد



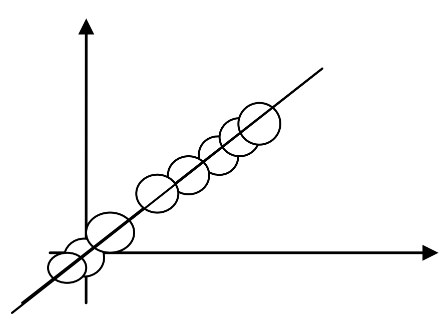
شكل(3)

7.1الغلاف Envelope

لتكن $f(x, y)$ معادلات مجموعه منحنيات ، c ثابت اختياري :ليكن E منحني يمس كل واحد من مجموعه المنحنيات C كما ان كل نقطه من E هي نقطه تماس لاحد منحنيات هذه المجموعه عندئذ يسمى E غلافاًلمجموع منحنيات $f(x_1, y_1, c) = 0$

لايجاد المعادله التفاضليه التي مجموع حلها العام هي مجموعه الدوائر التي مراكزها تقع على المستقيم $y = x$ ونصف قطر كل منها يساوي 1.

الحل: احداثيا مركز كل من هذه الدوائر متساويان اي (c_1, c) لان مركزها واقعه على $y = x$



شكل(4)

ويكون العنصر العام لمجموعه معادلات هذه الدوائر هو

$$(x-c)^2+(y-c)^2=1 \qquad (1)$$

وبأشتقاق (1) بالنسبه الى x ثم حلها من اجل c ،ينتج

$$c=\frac{x+yy'}{1+y'} \quad , \qquad 1+y'\neq 0$$

وبالتعويض عن c في (1) وبعد التبسيط نحصل على

$$(y-2)^2\,(1+y'^2)=(1+y')^2 \qquad (2)$$

وهي معادله تفاضليه من الرتبه الاولى.

يمكن الحصول على الغلاف لمجموعه الدوائر بعد اجراء التفاضل الجزئي بالنسبه الى الثابت الاختياري c على معادلات هذه الدوائر ثم حذف c كالاتي

$$(x-c)^2+(y-c)^2=1 \qquad (3)$$

$$\therefore\ 2(x-c)(-1)+2(y-c)(-1)=0 \qquad (4)$$

ثم نحذف c من معادلة (3) و (4) وبعد التبسيط نحصل على

$$y=x\pm\sqrt{2}$$

وتمثل مستقيمين متوازيين يمسان مجموعه الدوائر في الشكل (4)

لما كانت مجموعة نقاط الغلاف هي نقاط تماس لمنحنيات تكامل معادلة تفاضلية،لذلك فأن معادلة الغلاف تؤلف حلا لتلك المعادلة التفاضلية وهو حل منفرد لأن الغلاف لاينطبق على اي واحد من منحنيات التكامل وبهذا يمكن الحصول على الحل المنفرد (ان وجد)باجراء التفاضل الجزئي على معادلة مجموعة الحل العام بالنسبه للثابت الاختياري c ثم ا لغاء الثابت c .

1.7مسألة القيم ألابتدائية The initial value problem

عندما تكون الشروط الابتدائيه لمسأله ما معطاه في نقطه واحده x من المنطلق فأن المسأله تدعى بألمسأله ذات القيم الابتدائية.مثال على ذلك

$$y'=x+y \qquad 0\leq x\leq 2$$

$y(0) = 1$

1.8مسألة القيم الحدودية the boundary value problem

هي المعادلة التفاضلية مع شروطها الابتدائيه معرفه في اكثر من نقطه من نقاط المنطلق.

مثال على ذلك

$y'' = y\ , 1 \leq x \leq 3$

$y(1) = 1$

$y(3) = 3$